algofi
DÉPOSITAIRE DE SYSTÈMES D'INFORMATION FINANCIERS

Cette page est soutenue par ALGOFI
Cabinet de conseil, d'ingénierie financière et dépositaire de systèmes d'information financiers.
Par Ingefi, le Pôle Métier Ingénierie Financière d'Algofi.

Les options : Lien entre les paramètres de pricing et les grecs

Résumé :
Pour les traders et gérants de portefeuilles, connaître la dynamique de leurs grecs est indispensable afin que ces derniers puissent anticiper l'évolution de leurs risques en fonction de l'environnement de marché et les couvrir le cas échéant.

Le lien entre les paramètres de valorisation d'un portefeuille et les risques associés constitue de ce fait un facteur clé de succès de la couverture dynamique d'un portefeuille d'options.

Dans cette note, nous aborderons la gestion des risques d'un portefeuille d'options dans le cadre du modèle Black&Scholes non seulement en rappelant les facteurs de risques dudit modèle, mais aussi en mettant en exergue la relation existant entre la sensibilité d'une option à un paramètre de pricing et l'impact de l'évolution des autres paramètres de pricing sur cette sensibilité.

Par conséquent, après avoir présenté succinctement le modèle de Black&Scholes, nous étudierons les dépendances entre le prix, le delta, le gamma, le vega et le thêta d'une option et les paramètres du modèle de Black&Scholes qui sont le spot, le strike, la maturité, le taux sans risque et la volatilité.

Le modèle de BS (Black&Scholes) pour le pricing d'options :

Le modèle de Black&Scholes est un modèle définissant la valeur d'une option à un instant t comme instant la moyenne des valeurs intrinsèques possibles de cette dernière pondérée par leur probabilité respective d'occurrence. De ce fait, calculer le prix d'une option revient à faire un calcul d'espérance conditionnelle.

Le modèle calcule donc les cours possibles de l'actif sous jacent à l'échéance, ainsi que leur probabilité d'occurrence, en partant d'une hypothèse fondamentale que l'actif sous jacent est une variable aléatoire suivant une loi de distribution gaussienne.
On détermine ainsi la valeur actualisée au taux du marché monétaire de l'option à la date t. Dans notre cas, on regardera la valeur à t=0.

Avant d'aborder le lien entre les paramètres et les différentes dérivées nous allons rappeler les significations des différents paramètres :

S= la valeur actuelle du sous jacent
T= le temps qui reste à l'option avant l'échéance
K=le prix d'exercice de l'option
r=le taux d'intérêt sans risque
σ=la volatilité du sous jacent
N= la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0,1)
Φ= la fonction de densité de la loi normale centrée réduite i.e. N'(0,1)

<u>Lien entre les paramètres et le prix du call</u>

Prix du call sans dividendes : $c(s,t) = sN(d1) - Ke^{-rt}N(d2)$

Prix du put sans dividendes : $p(s,t) = -sN(-d1) + Ke^{-rt}N(-d2)$

Avec : $$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

Le prix du call est une fonction croissante du spot.

Ce dernier a tendance à diminuer lorsque l'échéance approche (i.e. la maturité baisse) à cause de l'effet temps et tends vers le payoff à maturité.
Il est également important de noter que pour les maturités faibles, l'effet de convexité du prix par rapport au spot est plus prononcé ; les options à maturité faible ont donc beaucoup de gamma.

Le prix du call est une fonction croissante de la volatilité. Pour les options à la monnaie (i.e. S=K), le prix est linéaire en la volatilité.

Le prix est une fonction croissante du taux sans risque, cependant il convient de faire certaines précisions :

Si le taux sans risque augmente, S augmente et le prix du call également. Cependant, la valeur du payoff actualisée baisse mais la hausse du forward l'emporte.

Comme mentionné plus haut, *le prix du call augmente avec la maturité*. Mais il convient de nuancer notre propos ; en effet, pour un call américain ceci est toujours vrai car on a une probabilité d'exercer l'option plus importante du fait de la période de temps élevée. A contrario pour un call européen avec dividende, ceci n'est pas toujours vrai car on pourrait avoir par exemple le prix un call d'échéance 6 mois plus cher que le prix d'un call d'échéance 7 mois avec décrochage de dividendes dans 6mois.

<u>Lien entre les paramètres et le delta</u>

$\Delta call = N(d1)$
$\Delta put = N(d1) - 1$

Le delta est une fonction croissante de S. par conséquent si on est delta positif alors on doit vendre des actions pour couvrir son option et inversement.

A la monnaie (S=K) le delta d'un call est de 0.5 et -0.5 pour un put. Ce chiffre correspond à la probabilité de voir le call finir dans la monnaie a maturité (S>K)
Si S=K, le delta du call augmente avec la maturité, est concave et tends vers 0.5 à maturité.
Si S>K, le delta du call décroit avec la maturité et tends vers 1 à maturité.
Si S<K, le delta du call croit avec la maturité et tends vers 0 à maturité.

Si S<K ou S=K ; et pour des volatilités annuelles > 10% en général, le delta est croissant en fonction de la volatilité. La quantité qui mesure la variation de delta pour une variation de volatilité s'appelle le vanna. Par conséquent juger de la croissance ou de la décroissance du delta dépend du niveau des volatilités.

L'impact du taux sans risque sur le delta est relativement faible.

<u>Lien entre les paramètres et le gamma</u>

$$\Gamma = \frac{\phi(d1)}{s\sigma\sqrt{t}} \text{ Avec } \phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Le gamma représente la dérivée seconde du prix par rapport au spot.
Le gamma est le même pour un call et pour un put.
Dans la pratique être long gamma signifie que l'on anticipe une forte volatilité dans le marché. En effet, la forte volatilité permettra de prendre des positions d'achat et de vente de spot (dans le cadre de la couverture dynamique) afin de financer le thêta payé pour tous les jours pour détenir l'option.

Si $S = Ke^{-rt}$ le gamma est maximum lorsqu'on se rapproche de l'expiration (i.e. T-t faible)
Si S<>K, alors le gamma est quasi nul proche de l'expiration car le payoff tends vers le payoff a maturité.

Comme pour le delta, l'effet du taux sans risque sur le gamma est limité.

Lien entre les paramètres et le vega

$$\frac{\delta v}{\delta \sigma} = S\phi(d1)\sqrt{t}$$

Le vega représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité implicite.
Le vega est croissant avec la maturité, contrairement au gamma.

Le vega est maximum lorsque $S = ke^{-rt+\frac{\sigma^2}{2}}$

Si S<>K, le vega est croissant en fonction de la volatilité. = plus la volatilité augmente plus le vega augmente
Si S=K, le vega est légèrement décroissant en fonction de la volatilité.
La variation de vega par rapport à un mouvement de volatilité implicite s’appelle le volga. Cette dérivée est beaucoup utilisée pour la gestion de produits exotiques.

Aucun n’impact du taux sans risque est à relever sur le vega.

Lien entre les paramètres et le thêta

$$\Theta = -\frac{\delta v}{\delta t}$$

$$\Theta call = -\frac{s\phi(d1)\sigma}{2\sqrt{t}} - rKe^{-rt}N(d2)$$

$$\Theta put = -\frac{s\phi(d1)\sigma}{2\sqrt{t}} + rKe^{-rt}N(-d2)$$

Le thêta communément appelé l'effet temps d'une option représente la sensibilité de l'option par rapport au temps.

Si on achète l'option, on paie une prime pour détenir l'option tous les jours et on a donc un thêta négatif et inversement.

Plus la volatilité augmente plus le thêta est important en valeur absolue.

Si S=K ; le thêta est élevé proche de l'échéance (l'importance relative d'un jour est plus important lorsque l'échéance est dans 7jours plutôt que lorsqu'elle est a 2 ans)

Si S=K, S>K, le theta augmente en valeur absolue lorsque les taux augmentent.

<u>Lien entre les paramètres et le taux sans risque</u>

$$\rho = \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{r}}$$

$$\rho \mathbf{call} = \mathbf{kte}^{-\mathbf{rt}} \text{ N(d2)}$$

$$\rho \mathbf{put} = -\mathbf{kte}^{-\mathbf{rt}} \text{ N(-d2)}$$

Communément appelé Rho, il représente la sensibilité par rapport aux taux.

Le rho augmente avec le spot
Le rho décroit avec la volatilité.
L'influence des taux est d'autant plus grande que T est grand, du fait du discounting (impact du facteur rT)